随机分布系统可靠保性能控制算法的研究

屈　毅[1,2]，郭宝龙[2]，李阿红[1]，贺争汉[1]，王大为[1]
(1.咸阳职业技术学院 电子信息系，陕西 咸阳 712000；2.西安电子科技大学 智能控制与图像工程研究所，西安 710071)

摘　要：针对随机分布系统采用数值优化算法设计的控制器不稳定的问题，研究了可靠保性能控制算法。该控制算法可实现将随机分布系统的值优化算法转换为线性矩阵不等式的可行解问题，并通过线性矩阵不等式的方法给出可靠保性能控制算法的充分条件，采用凸优化技术进行优化。通过实例仿真，证明该算法能够实现输出概率密度函数渐进追踪目标概率密度函数，并使随机分布系统的鲁棒性和稳定性有较好的改善。

关键词：概率密度函数控制；保性能；线性矩阵不等式；凸优化
中图分类号：TP12　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001-3695(2013)09-2677-04
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.09.029

Reliable guaranteed cost control for stochastic distribution system

QU Yi[1,2], GUO Bao-long[2], LI A-hong[1], HE Zheng-han[1], WANG Da-wei[1]
(1. *Dept. of Electrionics & Information Engineering, Xianyang Vocational Technical College, Xianyang Shaanxi* 712000, *China*; 2. *Institute of Intelligent Control & Image Engineering, Xidian University, Xi'an* 710071, *China*)

Abstract: This paper presented a reliable guaranteed cost control for the control of the system output probability density fuctions(PDF) with which existed non-reliable controller using numerial solution optimization. It was noted that the performance index of the guaranteed cost was guaranteed to be more than a certain upper bound using the control algorithm. It gave a sufficient condition for the existence of reliable guaranteed cost algorithm using linear matrix inquality(LMI). Furthermore, it derived the optimal reliable guaranteed cost algorithm using a convex optimization algorithm. An illustrative example demonstrates that the system output probability density functions follows the given probability density functions and the well robustness and stability is obtain.

Key words: probability density fuctions; guaranteed cost; linear matrix inquality; convex optimization

0　引言

早期的随机系统控制目的是研究系统输出变量统计特性，如自校正控制[1]、最小方差控制[2]、马尔可夫参数过程控制[3]和线性高斯二次型[4]等。这些系统控制目标是控制系统输出的方差、均值，使其满足相应的性能指标要求，其使用的前提是系统中的随机变量服从高斯分布。但是，在一些工业应用中，如高炉的火焰分布[5]、造纸中的纤维长度分布[6]、化工过程的分子量分布[7]等，这些系统的动态变化影响着系统随机变量的分布，使随机系统变量的分布并不满足高斯分布的假设。系统输出不服从高斯分布的系统称为随机分布系统。基于此，王宏教授提出了输出概率密度函数(probability density function, PDF)形状控制策略，这个控制策略是控制随机系统的输入量，使得系统输出的概率密度函数尽可能地跟踪目标概率密度函数，即随机分布控制。随机分布控制可有效地解决动态随机系统中随机变量不服从高斯分布的问题，并成功地应用到造纸生产过程中[6]。

经过十多年来的发展，随机分布控制已形成了一个逐渐完善的理论体系。最初，研究内容主要是基于B样条逼近和输入输出模型的建模和控制算法，包括线性B样条、B样条神经网络、平方根B样条、有理平方根B样条[8]等。同时，也对随机分布系统模型的鲁棒控制[9]、熵值极小化控制[10]、自适应控制[11]、随机分布闭环系统跟踪误差熵值极小化控制和非线性控制算法等方面进行了系统的研究。近年来，随机分布控制又出现了一些新的模型和控制策略。例如随机分布系统的故障诊断和容错控制[12]、随机分布系统的凸优化理论[6]。

但是，之前的随机分布控制是通过数值优化算法实现，会产生闭环结构不稳定，对鲁棒性、稳定性等闭环性能分析很难进行等问题。针对存在的问题，提出可靠保性能控制算法，在故障允许的范围内，将输出PDF控制器设计问题转换为求线性矩阵不等式可行解的问题，并通过凸优化技术进行优化。

本文针对离散随机分布系统，在俞立教授等人提出的一种新型保性能控制的基础上[13,14]，提出随机分布系统保性能控制器设计算法，通过B样条逼近建立离散随机分布系统输出PDF模型，并建立B样条逼近与权值间的动态关系。由于B样条逼近的基函数预先定义，因此，可将输出PDF逼近转换为权值的逼近(即权值代表了输出PDF的分布形状)。也就是说，保性能控制器通过控制B样条逼近权值，实现系统输出概率密度函数对目标概率密度函数的追踪控制。

本文提出随机分布闭环系统状态反馈保性能控制算法的充分条件，证明该充分条件等同于确定LMI解的可行性，并采用凸优化技术对控制算法进行优化。

收稿日期：2012-12-26；**修回日期**：2013-02-18
作者简介：屈毅(1974-)，男，陕西乾县人，博士，主要研究方向为随机分布控制、鲁棒控制、非线性系统理论(quyi0709052@163.com).

1 问题描述

记 $y\in[\alpha,b]$ 是有界随机变量;$v(k)$ 表示随机系统的输出;$u(k)\in R^m$ 是控制输入向量,控制系统输出 $v(k)$ 的概率分布形状。在区间 $[\alpha,y]$,随机分布系统输出 $v(k)$ 的概率密度函数 $\gamma(y,u(k))$ 如下:

$$P(\alpha\leqslant v(k)<y,u(k))=\int_{\alpha}^{y}\gamma(\eta,u(k))\mathrm{d}\eta \tag{1}$$

式中:$P(\alpha\leqslant v(k)<y,u(k))$ 表示在控制输入 $u(k)$ 控制下,随机系统的输出 $v(k)$ 在区间 $[\alpha,y]$ 上的概率,即控制系统输出概率密度函数 $\gamma(y,u(k))$ 的分布。

在已知区间 $[\alpha,b]$,概率密度函数 $\gamma(y,u(k))$ 是有界连续的,采用B样条神经网络,平方根B样条逼近可表示如下:

$$\sqrt{\gamma(y,u(k))}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(u(k))B_i(y)+\varepsilon_0 \tag{2}$$

式中:$\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是受输入 $u(k)$ 控制的权值;$B_i(y)(i=1,2,\cdots,n)$ 是预指定的基函数;ε_0 是逼近误差。在本文中,为了便于分析,ε_0 逼近误差可不予考虑,即 $\varepsilon_0=0$。式(2)可表示如下:

$$\sqrt{\gamma(y,u(k))}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(u(k))B_i(y) \tag{3}$$

式(3)两边平方,平方根B样条逼近可进一步表示如下:

$$\gamma(y,u(k))=(\sum_{i=1}^{n}\omega_i(u(k))B_i(y))^2\geqslant 0 \tag{4}$$

则,平方根B样条逼近可确保 $\gamma(y,u(k))$ 始终为正,避免了负值的出现。定义

$$C_0(y)=[B_1(y),B_2(y),\cdots,B_{n-1}(y)]$$
$$V(k)=[\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-1}]$$

在区间 $[\alpha,b]$,输出概率密度函数式(3)转换为如下表达式

$$\sqrt{\gamma(y,u(k))}=[C_0(y)B_n(y)]\begin{bmatrix}(V(k)\\ \omega_n\end{bmatrix} \tag{5}$$

由概率理论中的概率密度函数性质,则式(4)转换为

$$\int_{\alpha}^{b}\gamma(y,u(k))\,\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{b}([C_0(y)\ B_n(y)]\begin{bmatrix}V(k)\\ \omega_n\end{bmatrix})^2\,\mathrm{d}y)=1 \tag{6}$$

将其展开如下:

$$V^{\mathrm{T}}(k)[\int_{\alpha}^{b}C_0^{\mathrm{T}}(y)C_0(y)\,\mathrm{d}y)]V(k)+$$
$$2[\int_{\alpha}^{b}C_0(y)B_n(y)\,\mathrm{d}y]V(k)\,\omega_n+[\int_{\alpha}^{b}B_n^2(y)\,\mathrm{d}y)]\omega_n^2=1 \tag{7}$$

从式(7)可得平方根B样条逼近的 $n-1$ 个权值 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是独立的。

定义

$$\Gamma_1=\int_{\alpha}^{b}C_0^{\mathrm{T}}(y)C_0(y)\,\mathrm{d}y$$
$$\Gamma_2=\int_{\alpha}^{b}C_0(y)B_n(y)\,\mathrm{d}y$$
$$\Gamma_3=\int_{\alpha}^{b}B_n^2(y)\,\mathrm{d}y\neq 0 \tag{8}$$

将式(8)代入式(7),整理可得

$$\Gamma_3\omega_n^2+2\Gamma_2V(k)\omega_n+V^{\mathrm{T}}(k)\Gamma_1V(k)-1=0$$

进一步可得

$$\omega_n=h=\frac{-\Gamma_2V(k)+\sqrt{\Gamma_3-V^{\mathrm{T}}(k)\Gamma_0V(k)}}{\Gamma_3} \tag{9}$$

式中:$\Gamma_0=\Gamma_1\Gamma_3-\Gamma_2^{\mathrm{T}}\Gamma_2$。从式(9)可知,$\omega_n$ 和 $V(k)$ 之间是非线性关系。

对式(8)利用不等式 $2ab\leqslant a^{\mathrm{T}}a+b^{\mathrm{T}}b$ 可得

$$V^{\mathrm{T}}(k)\Gamma_2^{\mathrm{T}}\Gamma_2V(k)-(V^{\mathrm{T}}(k)\Gamma_1V(k)-1)\Gamma_3\geqslant 0 \tag{10}$$

其等价于式(11)。

$$V^{\mathrm{T}}(k)\Pi V(k)\leqslant 1 \tag{11}$$

式中:$\Pi=\Gamma_1-\Gamma_3^{-1}\Gamma_2^{\mathrm{T}}\Gamma_2>0$。

式(6)和(11)是对权值 $V(K)$ 的约束。

在本文中,仅考虑输入、输出之间的线性关系[5],由此可得输出概率密度控制系统的状态空间方程[5,6]如下:

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$$
$$V(k)=Cx(k) \tag{12}$$
$$\sqrt{\gamma(y,u(k))}=[C_0(y)\ B_n(y)]\begin{bmatrix}V(k)\\ h(V(k))\end{bmatrix}$$

式中:A、B、C、D 是适当维数已知常数矩阵;$x(k)$ 是状态向量;$u(k)$ 是控制输入;$V(k)$ 是输出向量。

2 保性能PDF控制器的设计

2.1 问题描述

控制器设计的目的是选择控制输入 $u(t)$ 使系统输出概率密度函数追踪目标概率密度函数,并满足规定的性能指标。定义

$$C(y)=[C_0(y)\ B_n(y)]$$
$$\tilde{V}(k)=[V(k)\ h(V(k))]^{\mathrm{T}}$$

系统输出概率密度函数和目标概率密度函数可进一步表示为

$$\sqrt{\gamma(y,u(k))}=C(y)\tilde{V}(k)$$
$$\sqrt{\gamma_g}=C(y)V_g$$

式中:V_g 是已知向量,γ_g 是目标概率密度函数。定义

$$X(k)=Q^{-1}\int_{\alpha}^{b}C^{\mathrm{T}}(y)[\sqrt{\gamma(y,u(k))}-\sqrt{\gamma_g}]\,\mathrm{d}y$$

式中:$Q=\int_{\alpha}^{b}C^{\mathrm{T}}(y)C(y)\mathrm{d}y$。

随机分布系统性能指标函数定义如下:

$$J=\int_{\alpha}^{b}(C(y)\tilde{V}(k)-\sqrt{\gamma_g})^2\mathrm{d}y)+u^{\mathrm{T}}(k)Ru(k)=X^{\mathrm{T}}(k)QX(k)+$$
$$u(k)Ru(k)=\sum_{k=0}^{\infty}((x(k))^{\mathrm{T}}Qx(k)+(u(k))^{\mathrm{T}}Ru(k)) \tag{13}$$

式中:$Q>0$,$R>0$ 是给定的权值矩阵;$x(k)\in R^n$ 是状态向量;$u(k)=[u_1(k),u_2(k),\cdots,u_m(k)]\in R^n$ 是控制输入。性能指标函数式(13)作为系统保性能指标函数。

对控制输入 $u_i(i=1,2,\cdots,m)$,用 u_i^F 表示的故障信号,则故障模型定义如下:

$$u_i^F=\alpha_iu_i\quad i=1,2,\cdots,m \tag{14}$$
$$0\leqslant\hat{\alpha}\leqslant\check{\alpha}\leqslant\bar{\alpha}\quad i=1,2,\cdots,m \tag{15}$$

式中:$\hat{\alpha}\leqslant 1$,$\check{\alpha}\geqslant 1$。

在故障模型式(14)(15)中:如果 $\hat{\alpha}=\check{\alpha}$,无故障,则正常运行,其中 $u_i^F=u_i$;如果 $\check{\alpha}\cong 0$,有故障,停止运行;如果 $\hat{\alpha}>0$,有部分故障,可能由随机的外界干扰或设备的老化引起,在满足性能要求的范围内可正常运行。

记:

$$u_k^F=[u_{k1}^F,u_{k2}^F,\cdots,u_{km}^F]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$
$$\check{\alpha}=\mathrm{diag}[\check{\alpha}_1,\check{\alpha}_2,\cdots,\check{\alpha}_m] \tag{17}$$
$$\hat{\alpha}=\mathrm{diag}[\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\cdots,\hat{\alpha}_m] \tag{18}$$
$$\alpha=\mathrm{diag}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m] \tag{19}$$

式中:α 为容错系数。如果 α 满足 $\hat{\alpha}\leqslant\alpha\leqslant\check{\alpha}$,则 α 是可接受的。

定义 1　对系统式(12)和性能指标式(13),如果存在正定矩阵 P 和 K,以及容忍系数 α,使不等式

$$[A+B\alpha K]^{\mathrm T}P[A+B\alpha K]-P+K^{\mathrm T}\alpha R\alpha K+Q<0 \tag{20}$$

成立,则 $u(k)=Kx(k)$ 是输出概率密度函数系统式(12)的可靠保性能控制律。

定义 2　对系统式(12)和性能指标式(13),存在一个矩阵 $P>0$,和可靠保性能控制律 $u(k)=Kx(k)$,使式(20)成立,则闭环系统:

$$x(k+1)=[A+B\alpha K]x(k) \tag{21}$$

渐进稳定且不等式

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}(x(k))^{\mathrm T}[Q+K^{\mathrm T}\alpha R\alpha K]x(k)\leqslant(x(0))^{\mathrm T}Px(0) \tag{22}$$

对满足式(15)的 α 成立。式中 $x(0)$ 是系统的初始状态。

保性能控制的目的是对于系统式(12),确定状态反馈增益矩阵 K,采用可靠保性能控制律 $u(k)=Kx(k)$,使系统满足 $\lim_{k\to\infty}\gamma(y,u(k))=\gamma_g(k)$。

记:

$$\beta=\mathrm{diag}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\} \tag{23}$$

$$\beta_0=\mathrm{diag}\{\beta_{10},\beta_{20},\cdots,\beta_{m0}\} \tag{24}$$

其中:$\beta_i=\dfrac{\check{\alpha}_i+\hat{\alpha}_i}{2}$,$\beta_{i0}=\dfrac{\check{\alpha}_i-\hat{\alpha}_i}{\check{\alpha}_i+\hat{\alpha}_i}(i=1,2,\cdots,m)$。

由式(16)~(19)和(23)(24)得出

$$\alpha=(I+\alpha_0)\beta \tag{25}$$

$$|\alpha_0|\leqslant\beta_0\leqslant I \tag{26}$$

式中:$\alpha_0=\mathrm{diag}[\alpha_{01},\alpha_{02},\cdots,\alpha_{0m}]$,$|\alpha_0|=\mathrm{diag}[|\alpha_{01}|,|\alpha_{02}|,\cdots,|\alpha_{0m}|]$。

定义 3　如果存在对称正定矩阵 P,使 Riccati 方程

$$A^{\mathrm T}PA-P+N+PB(B^{\mathrm T}PB+R)^{-1}B^{\mathrm T}PA=0 \tag{27}$$

成立且矩阵 $A-B(B^{\mathrm T}PB+R)^{-1}B^{\mathrm T}P$ 稳定,则矩阵 P 是 Riccati 方程式(27)的稳定解。

2.2　控制算法设计

下面定理提出了可靠保性能控制器存在的充分条件以及设计过程。

定理 1　对随机分布系统式(12)和保性能函数式(13),存在对角矩阵 $R_0>0$,和对称正定矩阵 X 和矩阵 Y,使矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -X+BR_0B^{\mathrm T} & BR_0 & AX+B\beta Y & 0 & 0\\ R_0B^{\mathrm T} & -R^{-1}+R_0 & \beta Y & 0 & 0\\ (AX+B\beta Y)^{\mathrm T} & Y^{\mathrm T}\beta & -X & X & Y^{\mathrm T}\beta\beta_0\\ 0 & 0 & -X & -Q^{-1} & 0\\ 0 & 0 & \beta_0\beta Y & 0 & -R_0 \end{bmatrix}<0 \tag{28}$$

成立。如果式(28)有一个可行解(R_0,X,Y),则

$$u(k)=Kx(k) \tag{29}$$

是系统式(12)的一个状态反馈可靠保性能控制律,且

$$k=YX^{-1}$$

则相应的闭环系统保性能函数满足

$$J^*=(x(0))^{\mathrm T}X^{-1}x(0) \tag{30}$$

证明　如果存在 α 和 K(式(29)),使不等式(20)成立。存在 $P>0$,$R>0$,利用 Schur 补性质,则不等式(20)转换为

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & 0 & A+B\alpha K\\ 0 & -R^{-1} & \alpha K\\ (A+B\alpha K)^{\mathrm T} & \alpha K^{\mathrm T} & Q-P \end{bmatrix}<0 \tag{31}$$

式(25)(26)代入(31),并利用不等式 $2ab\leqslant a^{\mathrm T}a+b^{\mathrm T}b$,则

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & 0 & A+B\alpha K\\ 0 & -R^{-1} & \alpha K\\ (A+B\alpha K)^{\mathrm T} & K^{\mathrm T}\alpha & Q-P) \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & 0 & A+B\beta K\\ 0 & -R^{-1} & \beta K\\ (A+B\beta K)^{\mathrm T} & K^{\mathrm T}\beta & Q-P \end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} B\\ I\\ 0\end{bmatrix}\alpha_0[0\quad 0\quad \beta K]+\left(\begin{bmatrix} B\\ I\\ 0\end{bmatrix}\alpha_0[(0\quad 0\quad \beta K]\right)^{\mathrm T}\leqslant$$

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & 0 & A+B\beta K\\ 0 & -R^{-1} & \beta K\\ (A+B\beta K)^{\mathrm T} & K^{\mathrm T}\beta & Q-P \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B\\ I\\ 0\end{bmatrix}R_0\begin{bmatrix} B\\ I\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm T}+$$

$$\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ K^{\mathrm T}\beta\end{bmatrix}R_0^{-1}\beta_0^2\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ K^{\mathrm T}\beta\end{bmatrix}^{\mathrm T}=$$

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}+BR_0B^{\mathrm T} & BR_0 & A+B\beta K\\ R_0B^{\mathrm T} & -R^{-1}+R_0 & \beta K\\ (A+B\beta K)^{\mathrm T} & K^{\mathrm T}\beta & Q-P+K^{\mathrm T}\beta R^{-1}\beta_0^2\beta K \end{bmatrix}$$

如果不等式

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}+BR_0B^{\mathrm T} & BR_0 & A+B\beta K\\ R_0B^{\mathrm T} & -R^{-1}+R_0 & \beta K\\ (A+B\beta K)^{\mathrm T} & K^{\mathrm T}\beta & Q-P+K^{\mathrm T}\beta R^{-1}\beta_0^2\beta K \end{bmatrix}<0 \tag{32}$$

成立,则不等式(31)成立。

在不等式(32)左乘和右乘矩阵 $\mathrm{diag}[I\ I\ P^{-1}]$,则 $\mathrm{diag}[I\ I\ P^{-1}]^{\mathrm T}$:

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}+BR_0B^{\mathrm T} & BR_0 & AP^{-1}+B\beta KP^{-1}\\ R_0B^{\mathrm T} & -R^{-1}+R_0 & \beta KP^{-1}\\ P^{-1}(A+B\beta K)^{\mathrm T} & P^{-1}K^{\mathrm T}\beta & P^{-1}QP^{-1}-P^{-1}+P^{-1}K^{\mathrm T}\beta R^{-1}\beta_0^2\beta KP^{-1} \end{bmatrix}<0 \tag{33}$$

记 $X=P^{-1}$,$Y=KP^{-1}$,代入式(33),并对式(33)用 Schur 补性质进行逆推导,则

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}+BR_0B^{\mathrm T} & BR_0 & AP^{-1}+B\beta KP^{-1}\\ R_0B^{\mathrm T} & -R^{-1}+R_0 & \beta KP^{-1}\\ P^{-1}(A+B\beta K)^{\mathrm T} & P^{-1}K^{\mathrm T}\beta & P^{-1}QP^{-1}-P^{-1}+P^{-1}K^{\mathrm T}\beta R^{-1}\beta_0^2\beta KP^{-1} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} -X+BR_0B^{\mathrm T} & BR_0 & AX+B\beta Y\\ R_0B^{\mathrm T} & -R^{-1}+R_0 & \beta Y\\ (AX+B\beta Y)^{\mathrm T} & Y^{\mathrm T}\beta & -X \end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ X & Y^{\mathrm T}\beta\beta_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -Q^{-1} & 0\\ 0 & -R_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ X & Y^{\mathrm T}\beta\beta_0\end{bmatrix}^{\mathrm T}=$$

$$\begin{bmatrix} -X^{-1}+BR_0B^{\mathrm T} & BR_0 & AX+B\beta Y & 0 & 0\\ R_0B^{\mathrm T} & -R^{-1}+R_0 & \beta Y & 0 & 0\\ (AX+B\beta Y)^{\mathrm T} & Y^{\mathrm T}\beta & -X & X & Y^{\mathrm T}\beta\beta_0\\ 0 & 0 & -X & -Q^{-1} & 0\\ 0 & 0 & \beta_0\beta Y & 0 & -R_0 \end{bmatrix}$$

定理 1 成立。证明完毕。

对含有参数矩阵 R_0、X、Y 的线性矩阵不等式(28),如果其解可行,则式(29)表示了保性能控制算法参数化的表达式,采用凸优化算法[17~19]可优化。

定理 2　对性能指标式(13)和给定输出 PDF 系统式(12),如果以下优化问题

$$\begin{aligned} &\min_{(\lambda,R_0,X,Y)}\lambda\\ \text{s.t.}\quad &(1)\quad 式(28)\\ &(2)\quad \begin{bmatrix} -\lambda & I\\ I & -X\end{bmatrix}<0 \end{aligned} \tag{34}$$

有可行解(λ, R_0, X, Y)，则可得 $u^*(k)=YX^{-1}x(k)$ 是系统最优状态可靠反馈保性能控制律。

证明 如果(λ, R_0, X, Y)是优化问题式(28)的可行解，则(λ, R_0, X, Y)也是问题式(34)中约束条件(1)的一个可行解。根据定理2，控制律 $u^*(k)=YX^{-1}x(k)$ 是系统式(12)的一个可靠保性能控制律。

依据矩阵的 Schur 补性质，式(34)的约束条件(2)等价于 $\lambda > X^{-1} > 0$，即系统性能上界最小化。由于式(34)中的目标函数和约束条件都是变量的凸函数，因此，式(34)是一个线性矩阵不等式凸优化问题，从而可以达到全局最小化，定理2得证。

3 数值仿真

举例验证保性能控制算法的可行性，采用B样条基函数构成的模型构造系统式(12)。B样条定义如下：

$$\sqrt{\gamma(y,u(k))}=B_1\omega_1+B_2\omega_2+B_3\omega_3$$

式中：

$$\begin{cases} B_1=(y-1)^2I_1+(y+1)I_2+(y+2)I_3 \\ B_2=(y+1)^2I_1+(y+2)I_2+(y+1)I_3 \\ B_3=(y-2)^2I_1+(y+3)I_2+(y-1)I_3 \end{cases}$$

$$B_i=\begin{cases}1 & y\in[i+1\ i+2] \\ 0 & \text{other}\end{cases} \quad i=1,2,3$$

对于系统式(12)和性能指标式(13)中系数取值如下：

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, R=1$$

取初始状态 $x(0)=[0\quad 0]^{\mathrm{T}}$，假设单输入系统被考虑，系统部分有故障。记：

$$\hat{\alpha}=0.84, \check{\alpha}=1.32$$

应用定理1和2，依据式(34)采用LMI凸优化算法[17]计算得到优化可靠保性能控制律。

$$u^*(k)=[3.05\quad 0.99]x(k)$$

闭环系统保性能函数上确界为

$$J^*=12.45$$

采用数值优化算法[6]可得到

$$u(k)=[3.12\quad 1.02], J=12.86$$

通过计算得到的数值比较分析，得出本文提出的保性能控制算法在性能指标上优于数值优化控制算法。

采用可靠保性能控制算法和数值优化控制算法在MATLAB环境下进行上例仿真。图1是保性能控制算法性能图。通过比较分析仿真图可得出，保性能控制算法能较好地实现控制系统输出概率密度函数分追踪目标概率密度函数，且随机分布系统具有较好的鲁棒性和稳定性。

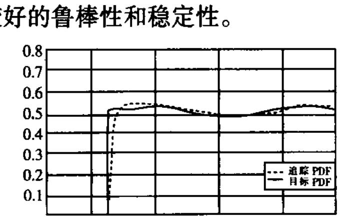

图1 保性能控制算法响应

4 结束语

本文研究了随机分布系统保性能控制问题。在采用平方根B样条逼近系统输出概率密度函数的基础上，提出一种新的保性能控制算法，即可靠保性能控制算法，并将保性能控制算法转换为线性矩阵不等式的可行性问题，最后通过凸优化技术对算法进行优化。通过举例计算和仿真表明该保性能算法在一定程度上解决了随机分布系统数值优化算法导致控制器设计困难的问题，实现了系统输出概率密度函数追踪目标概率密度函数，提高了系统的稳定性和鲁棒性。

参考文献：

[1] WELLSTEAD P E, ZARROP M B. Self-tuning systems: control and signal processing[M]. New York: Wiley, 1991.

[2] ASTROM K J. Introduction to stochastic control theory[M]. New York: Academic Press, 1970.

[3] GAJIC Z R, LOSADA R. Monotonicity of algebraic Lyapunov iterations for optimal control of jump parameter linear systems[C]//Proc of American Control Conference. 1998: 746-750.

[4] BROWN M, HARRIS C J. Neurofuzzy adaptive modelling and control[M]. Hertfordshire: Prentice-Hall International (UK) Ltd., 1994.

[5] SUN X B, WANG H. Closed loop control of gas jet games distribution using probability density function shaping techniques[C]//Proc of American Control Conference. 2004.

[6] WANG Hong. Bounded dynamic stochastic systems modelling and control[M]. New York: Springer, 2000.

[7] 陈海永，王宏. 基于LMI的参数随机变化系统的概率密度函数控制[J]. 自动化学报，2007，33(11)：1216-1220.

[8] YI Yang, SHEN Hong, GUO Lei. Statistic PID tracking control for non-Gaussian stochastic systems based on T-S fuzzy model[J]. International Journal of Automation and Computing, 2009, 6(1): 81-87.

[9] GUO Lei, WANG Hong. PID controller design for output PDFs of stochastic systems using linear matrix inequalities[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2005, 35(1): 65-71.

[10] GUO Lei, WANG Hong. Stochastic distribution control system design: a convex optimization approach[M]. New York: Springer, 2009.

[11] WANG Hong. Minimum entropy control of non-Gaussian dynamic stochastic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(2): 398-403.

[12] AFSHAR P, WANG Hong. An ILC-based adaptive control for general stochastic system with strictly decreasing entropy[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2009, 20(3): 471-482.

[13] GUO Lei, WANG Hong. Fault detection and diagnosis for general stochastic systems using B-Spline expansions and nonlinear filters[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Regular Papers, 2005, 52(8): 1644-1652.

[14] VEILLETTE R J. Reliable linear-quadratic state feedback control[J]. Automatica, 1995, 31(5): 137-143.

[15] YU Li. An LMI approach to reliable guaranteed cost control of discrete-time systems with actuator failure[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 162(3): 1325-1331.

[16] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, *et al*. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[17] LANGER J, LANDAU I D. Combined pole placement sensitivity function shaping method using convex optimization criteria[J]. Automatica, 1999, 35(6): 1111-1220.

[18] 姚利娜，王宏. 基于有理平方根逼近的非高斯随机分布系统的故障诊断和容错控制[J]. 控制理论与应用，2006，23(4)：561-568.

[19] 屈毅，李战明，李二超. 随机分布系统的神经保性能控制器的设计[J]. 计算机集成制造系统，2012，18(11)：2515-2521.

随机分布系统可靠保性能控制算法的研究

作者：屈毅， 郭宝龙， 李阿红， 贺争汉， 王大为， QU Yi， GUO Bao-long， LI A-hong， HE Zheng-han， WANG Da-wei

作者单位：屈毅,QU Yi(咸阳职业技术学院电子信息系,陕西咸阳712000;西安电子科技大学智能控制与图像工程研究所,西安710071)， 郭宝龙,GUO Bao-long(西安电子科技大学智能控制与图像工程研究所,西安,710071)， 李阿红,贺争汉,王大为,LI A-hong,HE Zheng-han,WANG Da-wei(咸阳职业技术学院电子信息系,陕西咸阳,712000)

刊名：计算机应用研究ISTIC PKU

英文刊名：Application Research of Computers

年，卷(期)：2013,30(9)